

УДК 539.3

Ю. Г. Пронина

**СОСРЕДОТОЧЕННЫЕ СИЛЫ И МОМЕНТЫ
В УПРУГОЙ ПОЛУПЛОСКОСТИ С ОТВЕРСТИЕМ*)**

1. Введение. Аналитические решения задач линейной теории упругости о сосредоточенных силах и моментах получены лишь для немногих областей с несложной границей, таких как бесконечная плоскость, полуплоскость, круг, клин, две соединенных полуплоскости [1, 2]. В случае неодносвязной области задача существенно усложняется. Теоретические и экспериментальные исследования напряженного состояния тел с отверстиями под действием нагрузки, приложенной на их границе, проводились многими учеными. Результаты и методы этих исследований представлены, например, в работах [3–7]. В общем случае задача приводится к решению граничных интегральных уравнений (ГИУ) [1, 2, 6–8]. В отдельных ситуациях решения построены с помощью конформного отображения или криволинейных координат [3, 9, 10]. В частности, в монографии [3] указаны вытекающие из формул G. Jeffery [9] решения некоторых авторов о сосредоточенных силах на границе полубесконечной пластины с круговым вырезом. В ряде задач используется аналитическое продолжение потенциалов Г. В. Колосова в верхнюю полуплоскость или их представление в виде специальных рядов [10, 11].

В отличие от упомянутых работ в данной статье изучено тело с отверстием, нагруженное не только усилиями, приложенными на его сложной границе и на бесконечности, но также силами и моментами, действующими во внутренних точках. Исключение составляет публикация [10] о сосредоточенной силе в плоскости с двумя равными круговыми вырезами. Выведены интегральные уравнения Фредгольма первого рода, аналогичные уравнениям, полученным М. П. Савруком без учета сосредоточенных воздействий [6]. Помимо этого, задача непосредственно приведена к системе линейных алгебраических уравнений с помощью введения дискретной фиктивной нагрузки.

2. Постановка задачи. Рассмотрим упругую полуплоскость $y \leq 0$ с отверстием, описываемым простым гладким замкнутым контуром Γ (рис. 1). Будем предполагать, что контур Γ имеет кривизну, удовлетворяющую условию Гельдера [1].

При этом

1) на бесконечности к полуплоскости приложены постоянные напряжения $\sigma_{xx}^\infty = q_x^\infty = \text{const}$, $\sigma_{yy}^\infty = 0$, $\sigma_{xy}^\infty = 0$;

2) прямолинейная граница $y = 0$ полуплоскости нагружена нормальными $q_{yy}(x)$ и касательными $q_{xy}(x)$ усилиями, причем $q_{yy}(x)$ и $q_{xy}(x)$ — функции абсциссы x , удовлетворяющие при больших $|x|$ условиям [1]

$$q_{yy}(x) = o(x^{-1}), \quad q_{xy}(x) = o(x^{-1});$$

Пронина Юлия Григорьевна — доцент кафедры вычислительных методов механики деформируемого тела факультета прикладной математики–процессов управления Санкт-Петербургского государственного университета. Количество опубликованных работ: 40. Научные направления: сингулярная плоская задача теории упругости, разрушение тел в коррозионных средах. E-mail: DearJuly@gmail.com.

*) Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты № 06-01-0171, 08-01-00394).

© Ю. Г. Пронина, 2009

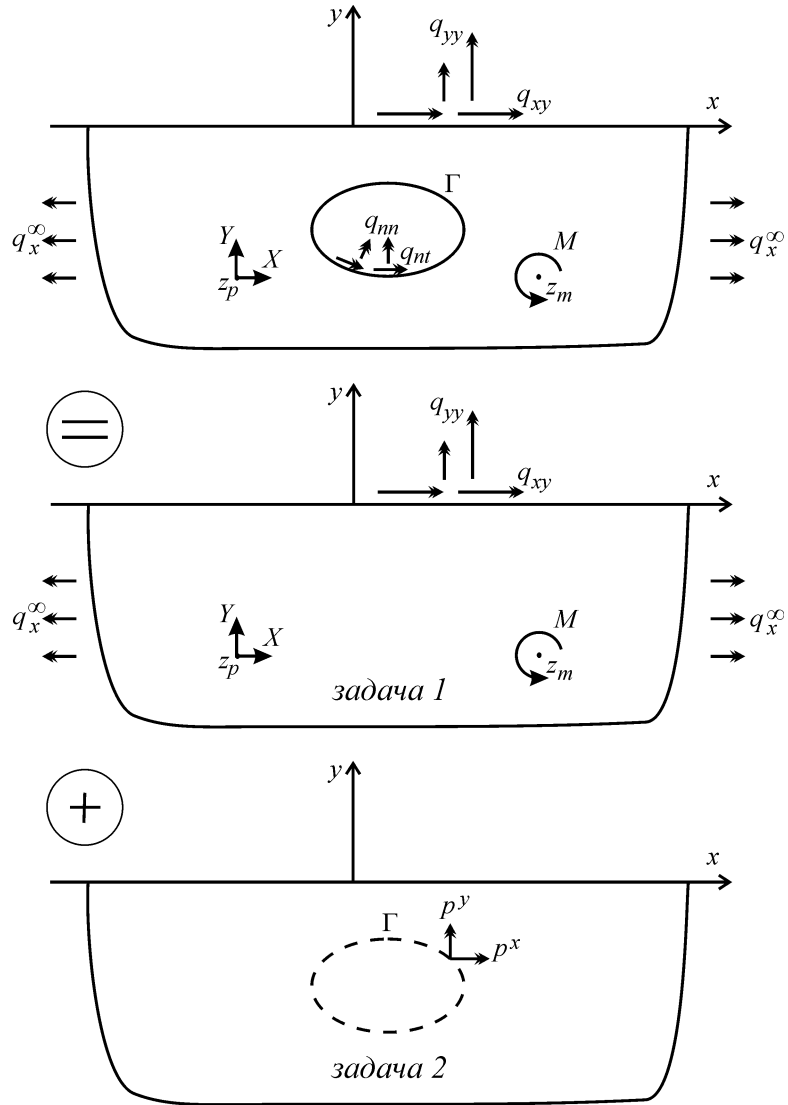


Рис. 1. Представление исходной задачи в виде суперпозиции двух вспомогательных задач

3) на контуре Γ отверстия действуют известные нагрузки с нормальной $q_{nn}(t)$ и касательной $q_{nt}(t)$ составляющими, непрерывными на Γ , $t \in \Gamma$;

4) в точках z_p, z_m полуплоскости с отверстием находятся сосредоточенная сила $\mathbf{P} = X + iY$ и момент M соответственно.

Обобщение задачи на случай периодических сосредоточенных сил и моментов, а также периодической нагрузки на прямолинейной границе представлено в п. 4 данной статьи.

Цель работы: построение численно-аналитического решения поставленной задачи.

Вопросы существования и единственности решения и при указанных условиях освещены в монографиях [1, 7].

3. Вывод основных разрешающих уравнений. Искомое поле напряжений представим в виде [12]

$$\sigma_{xx}(z) = \sigma_{xx}^{(1)}(z) + \sigma_{xx}^{(2)}(z), \quad \sigma_{yy}(z) = \sigma_{yy}^{(1)}(z) + \sigma_{yy}^{(2)}(z), \quad \sigma_{xy}(z) = \sigma_{xy}^{(1)}(z) + \sigma_{xy}^{(2)}(z), \quad (1)$$

где слагаемые с индексом (1) суть напряжения в полуплоскости с прямолинейной границей, нагруженной усилиями $q_{yy}(x)$, $q_{xy}(x)$, q_x^∞ и сосредоточенными воздействиями \mathbf{P} и M (задача 1); индексом (2) отмечены аналогичные величины в сплошной полуплоскости (без отверстия), внутри которой на линии, соответствующей контуру Γ , действуют неизвестные заранее и подлежащие определению усилия $\mathbf{p}(\zeta) = p^x(\zeta) + ip^y(\zeta)$, $\zeta \in \Gamma$ (задача 2) — рис. 1; $z = x + iy$. Очевидно, что если внешняя нагрузка задана только на контуре отверстия, то все компоненты напряжений в задаче 1 равны нулю.

Компоненты напряжений в каждой из этих задач ($p = 1, 2$) удовлетворяют формулам Г. В. Колосова [1]

$$\sigma_{xx}^{(p)}(z) + \sigma_{yy}^{(p)}(z) = 4\operatorname{Re}\Phi^{(p)}(z), \quad \sigma_{yy}^{(p)}(z) - \sigma_{xx}^{(p)}(z) + 2i\sigma_{xy}^{(p)}(z) = 2[\bar{z}\Phi^{(p)'}(z) + \Psi^{(p)}(z)]. \quad (2)$$

Черта сверху означает комплексное сопряжение, штрих — производную по аргументу.

Функции $\Phi^{(1)}(z)$ и $\Psi^{(1)}(z)$, согласно [1, 13], определяются выражениями

$$\begin{aligned} \Phi^{(1)}(z) = & -\frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{q_{yy}(\tau) - iq_{xy}(\tau)}{\tau - z} d\tau + \frac{q_x^\infty}{4} - \\ & - \frac{X + iY}{2\pi(1 + \kappa)} \left[\frac{1}{z - z_p} + \frac{\kappa}{z - \bar{z}_p} \right] - \frac{X - iY}{2\pi(1 + \kappa)} \frac{\bar{z}_p - z_p}{(z - \bar{z}_p)^2} - \frac{iM}{2\pi(z - \bar{z}_m)^2}, \\ \Psi^{(1)}(z) = & -\frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{q_{yy}(\tau) + iq_{xy}(\tau)}{\tau - z} d\tau + \\ & + \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{q_{yy}(\tau) - iq_{xy}(\tau)}{(\tau - z)^2} \tau d\tau - \frac{q_x^\infty}{2} - \frac{X + iY}{2\pi(1 + \kappa)} \left[\frac{\bar{z}_p}{(z - z_p)^2} + \frac{\kappa \bar{z}_p}{(z - \bar{z}_p)^2} \right] + \\ & + \frac{X - iY}{2\pi(1 + \kappa)} \left[\frac{\kappa}{z - z_p} + \frac{1}{z - \bar{z}_p} - \frac{\bar{z}_p - z_p}{(z - \bar{z}_p)^2} - \frac{2\bar{z}_p(\bar{z}_p - z_p)}{(z - \bar{z}_p)^3} \right] - \\ & - \frac{iM}{2\pi} \left[\frac{1}{(z - z_m)^2} + \frac{1}{(z - \bar{z}_m)^2} + \frac{2\bar{z}_m}{(z - \bar{z}_m)^3} \right], \end{aligned} \quad (3)$$

где интегрирование производится по вещественной оси (τ — локальная переменная интегрирования); $\kappa = 3 - 4\nu$ в случае плоской деформации и $\kappa = (3 - \nu)/(1 + \nu)$ при обобщенном плоском напряженном состоянии; ν — коэффициент Пуассона материала полуплоскости.

Функции Г. В. Колосова для второй задачи запишем в форме [14]

$$\Phi^{(2)}(z) = - \int_{\Gamma} \frac{\mathbf{p}(\zeta)}{2\pi(1 + \kappa)} \left[\frac{1}{z - \zeta} + \frac{\kappa}{z - \bar{\zeta}} \right] ds - \int_{\Gamma} \frac{\overline{\mathbf{p}(\zeta)}}{2\pi(1 + \kappa)} \frac{\bar{\zeta} - z}{(z - \bar{\zeta})^2} ds,$$

$$\begin{aligned}\Psi^{(2)}(z) = & - \int_{\Gamma} \frac{\mathbf{p}(\zeta)}{2\pi(1+\kappa)} \left[\frac{\bar{\zeta}}{(z-\zeta)^2} + \frac{\kappa\bar{\zeta}}{(z-\bar{\zeta})^2} \right] ds + \\ & + \int_{\Gamma} \frac{\overline{\mathbf{p}(\zeta)}}{2\pi(1+\kappa)} \left[\frac{\kappa}{z-\zeta} + \frac{1}{z-\bar{\zeta}} - \frac{\bar{\zeta}-\zeta}{(z-\bar{\zeta})^2} - \frac{2\bar{\zeta}(\bar{\zeta}-\zeta)}{(z-\bar{\zeta})^3} \right] ds.\end{aligned}\quad (4)$$

Отметим, что $\overline{\mathbf{p}(\zeta)}$ означает величину, комплексно сопряженную к $\mathbf{p}(\zeta)$, ds – дифференциал дуги контура Γ , $\zeta \in \Gamma$, $\bar{\zeta} \notin \Gamma$.

При таком выборе функций $\Phi^{(p)}(z)$ и $\Psi^{(p)}(z)$ краевые условия удовлетворяются на прямолинейной границе полуплоскости и на бесконечности. На контуре отверстия они имеют вид

$$\sigma_{nn}^{(1)}(t) + \sigma_{nn}^{(2)}(t) = q_{nn}(t), \quad \sigma_{nt}^{(1)}(t) + \sigma_{nt}^{(2)}(t) = q_{nt}(t)$$

или

$$\sigma_{nn}^{(2)}(t) - i\sigma_{nt}^{(2)}(t) = q_{nn}(t) - iq_{nt}(t) - \sigma_{nn}^{(1)}(t) + i\sigma_{nt}^{(1)}(t), \quad t \in \Gamma. \quad (5)$$

Здесь $\sigma_{nn}^{(p)}(t)$ и $\sigma_{nt}^{(p)}(t)$ – нормальная и касательная компоненты напряжения на кривой Γ в задаче 1 ($p=1$) и задаче 2 ($p=2$). Следуя [1], правомерно написать

$$\sigma_{nn}^{(p)}(z) - i\sigma_{nt}^{(p)}(z) = 2\text{Re}\Phi^{(p)}(z) - \left[\bar{z}\Phi^{(p)'}(z) + \Psi^{(p)}(z) \right] e^{2i\theta} \quad (p=1, 2), \quad (6)$$

где θ – угол между нормалью к контуру Γ и осью Ox .

Используя формулы (3), (4), (6), краевое условие (5) можно привести к интегральному уравнению относительно неизвестной нагрузки $\mathbf{p}(\zeta)$:

$$\int_{\Gamma} \mathbf{p}(\zeta) K(t, \zeta) ds + \int_{\Gamma} \overline{\mathbf{p}(\zeta)} R(t, \zeta) ds = f(t), \quad t \in \Gamma, \quad (7)$$

в котором

$$\begin{aligned}K(t, \zeta) = & - \frac{1}{2\pi(1+\kappa)} \left\{ \frac{1}{t-\zeta} + \frac{\kappa}{t-\bar{\zeta}} - \frac{\bar{\zeta}-\zeta}{(\bar{t}-\zeta)^2} + \left[\frac{\bar{t}-\bar{\zeta}}{(t-\zeta)^2} + \frac{\kappa(\bar{t}-\bar{\zeta})}{(t-\bar{\zeta})^2} \right] e^{2i\theta} \right\}, \\ R(t, \zeta) = & - \frac{1}{2\pi(1+\kappa)} \left\{ \frac{1}{\bar{t}-\bar{\zeta}} + \frac{\kappa}{\bar{t}-\zeta} + \frac{\bar{\zeta}-\zeta}{(t-\bar{\zeta})^2} + \right. \\ & \left. + \left[\frac{\kappa}{t-\zeta} + \frac{1}{t-\bar{\zeta}} - \frac{\bar{\zeta}-\zeta}{(t-\bar{\zeta})^2} + \frac{2(\bar{\zeta}-\zeta)(\bar{t}-\bar{\zeta})}{(t-\bar{\zeta})^3} \right] e^{2i\theta} \right\}\end{aligned}\quad (8)$$

и

$$\begin{aligned}f(t) = & q_{nn}(t) - iq_{nt}(t) + \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{q_{yy}(\tau) - iq_{xy}(\tau)}{\tau - t} d\tau - \\ & - \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{q_{yy}(\tau) + iq_{xy}(\tau)}{\tau - \bar{t}} d\tau - \frac{q_x^\infty}{2} -\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \left[\frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{q_{yy}(\tau) - iq_{xy}(\tau)}{(\tau - t)^2} (\bar{t} - \tau) d\tau + \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{q_{yy}(\tau) + iq_{xy}(\tau)}{\tau - t} d\tau + \frac{q_x^\infty}{2} \right] e^{2i\theta} + \\
& + \frac{Mi}{2\pi} \left[\frac{1}{(t - \bar{z}_m)^2} - \frac{1}{(\bar{t} - z_m)^2} \right] - \frac{Mi}{2\pi} \left[\frac{1}{(t - z_m)^2} + \frac{1}{(t - \bar{z}_m)^2} - \frac{2(\bar{t} - \bar{z}_m)}{(t - \bar{z}_m)^3} \right] e^{2i\theta} - \\
& - (X + iY)K(t, z_p) - (X - iY)R(t, z_p). \tag{9}
\end{aligned}$$

При вычислении интегралов в выражениях (4), (7) можно пользоваться следующими соотношениями [14]. Пусть, например, «верхняя» и «нижняя» части контура Γ описываются уравнениями типа

$$\zeta = \xi + i\eta(\xi), \quad \bar{\zeta} = \xi - i\eta(\xi), \quad \zeta \in \Gamma, \quad \bar{\zeta} \notin \Gamma.$$

Поскольку

$$\begin{aligned}
ds &= \sqrt{1 + [\eta'_\xi(\xi)]^2} d\xi, \\
d\zeta &= [1 + i\eta'_\xi(\xi)] d\xi, \quad d\bar{\zeta} = [1 - i\eta'_\xi(\xi)] d\xi,
\end{aligned}$$

то для «верхней» и «нижней» частей контура справедливы выражения

$$d\xi = \frac{d\zeta}{1 + i\eta'_\xi(\xi)}, \quad d\xi = \frac{d\bar{\zeta}}{1 - i\eta'_\xi(\xi)}$$

и

$$ds = \frac{\sqrt{1 + [\eta'_\xi(\xi)]^2}}{1 + i\eta'_\xi(\xi)} d\zeta, \quad ds = \frac{\sqrt{1 + [\eta'_\xi(\xi)]^2}}{1 - i\eta'_\xi(\xi)} d\bar{\zeta}.$$

4. Периодические воздействия. Рассмотрим теперь ситуацию, когда в полуплоскости с отверстием действуют периодические системы сил и моментов. При этом, конечно, следует иметь в виду, что тело должно находиться в равновесии. Бесконечный ряд сосредоточенных сил необходимо уравновесить периодической или равномерной нагрузкой на прямолинейной границе $y = 0$, усилиями на бесконечности, либо другой системой или системами сил, приложенных во внутренних точках тела. При самоуравновешенной нагрузке условие, накладываемое на функции $q_{yy}(x)$ и $q_{xy}(x)$ в п. 2, становится необязательным. Будем считать, что условия равновесия выполняются.

Итак, пусть в полуплоскости с отверстием в точках $z_p^k = z_p + kl_p$, $z_m^k = z_m + kl_m$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) действуют периодические системы одинаковых сосредоточенных сил $\mathbf{P} = X + iY$ и моментов M соответственно (рис. 2). Для полноты исследований положим, что нагрузка на прямолинейной границе также является периодической:

$$q_{yy}(x) = q_{yy}(x + kl_q), \quad q_{xy}(x) = q_{xy}(x + kl_q), \quad x \in [a, b], \quad |b - a| \leq l_q.$$

В таком случае, согласно [14, 15], функции Γ . В. Колосова для задачи 1 имеют вид

$$\Phi^{(1)}(z) = -\frac{1}{2l_q i} \int_a^b [q_{yy}(\tau) - iq_{xy}(\tau)] \operatorname{ctg} \frac{\pi(\tau - z)}{l_q} d\tau + \frac{q_x^\infty}{4} -$$

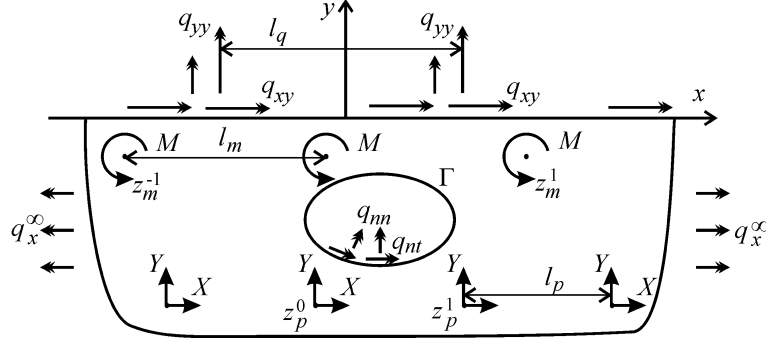


Рис. 2. Периодические силы и моменты

$$\begin{aligned}
 & -\frac{X+iY}{2l_p(1+\kappa)} \left[\operatorname{ctg} \frac{\pi(z-z_p)}{l_p} + \kappa \operatorname{ctg} \frac{\pi(z-\bar{z}_p)}{l_p} \right] - \\
 & -\frac{\pi(X-iY)}{2l_p^2(1+\kappa)} \frac{\bar{z}_p-z_p}{\sin^2[\pi(z-z_p)/l_p]} - \frac{M\pi i}{2l_m^2} \frac{1}{\sin^2[\pi(z-\bar{z}_m)/l_m]}, \\
 \Psi^{(1)}(z) = & -\frac{1}{l_q} \int_a^b q_{xy}(\tau) \operatorname{ctg} \frac{\pi(\tau-z)}{l_q} d\tau + \frac{z\pi}{2l_q^2 i} \int_a^b \frac{q_{yy}(\tau) - iq_{xy}(\tau)}{\sin^2[\pi(\tau-z)/l_q]} d\tau - \frac{q_x^\infty}{2} + \\
 & + \frac{X+iY}{2l_p(1+\kappa)} \left[\operatorname{ctg} \frac{\pi(z-z_p)}{l_p} + \kappa \operatorname{ctg} \frac{\pi(z-\bar{z}_p)}{l_p} - \right. \\
 & \left. - \frac{\pi}{l_p} \left(\frac{\bar{z}_p-z_p+z}{\sin^2[\pi(z-z_p)/l_p]} + \frac{\kappa z}{\sin^2[\pi(z-\bar{z}_p)/l_p]} \right) \right] + \\
 & + \frac{X-iY}{2l_p(1+\kappa)} \left[\kappa \operatorname{ctg} \frac{\pi(z-z_p)}{l_p} + \operatorname{ctg} \frac{\pi(z-\bar{z}_p)}{l_p} + \right. \\
 & \left. + \frac{\pi(\bar{z}_p-z_p)}{l_p} \left(\frac{1}{\sin^2[\pi(z-\bar{z}_p)/l_p]} - \frac{2\pi z}{l_p} \frac{\operatorname{ctg}[\pi(z-\bar{z}_p)/l_p]}{\sin^2[\pi(z-\bar{z}_p)/l_p]} \right) \right] - \\
 & - \frac{M\pi i}{2l_m^2} \left[\frac{1}{\sin^2[\pi(z-z_m)/l_m]} - \frac{1}{\sin^2[\pi(z-\bar{z}_m)/l_m]} + \frac{2\pi z}{l_m} \frac{\operatorname{ctg}[\pi(z-\bar{z}_m)/l_m]}{\sin^2[\pi(z-\bar{z}_m)/l_m]} \right].
 \end{aligned}$$

Комплексные потенциалы $\Phi^{(2)}(z)$ и $\Psi^{(2)}(z)$ остаются без изменений. В силу этого, ядра $K(t, \zeta)$ и $R(t, \zeta)$ интегрального уравнения (7) определяются прежними выражениями (8), а его правая часть $f(t)$ принимает вид

$$\begin{aligned}
 f(t) = & q_{nn}(t) - iq_{nt}(t) + \frac{1}{2l_q i} \int_a^b [q_{yy}(\tau) - iq_{xy}(\tau)] \operatorname{ctg} \frac{\pi(\tau-t)}{l_q} d\tau - \\
 & - \frac{1}{2l_q i} \int_a^b [q_{yy}(\tau) + iq_{xy}(\tau)] \operatorname{ctg} \frac{\pi(\tau-\bar{t})}{l_q} d\tau - \frac{q_x^\infty}{2} -
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \left[\frac{1}{l_q} \int_a^b q_{xy}(\tau) \operatorname{ctg} \frac{\pi(\tau - t)}{l_q} d\tau + \frac{\pi(\bar{t} - t)}{2l_q^2 i} \int_a^b \frac{q_{yy}(\tau) - iq_{xy}(\tau)}{\sin^2 [\pi(\tau - t)/l_q]} d\tau + \frac{q_x^\infty}{2} \right] e^{2i\theta} + \\
& + \frac{X + iY}{2l_p(1 + \varkappa)} \left[\operatorname{ctg} \frac{\pi(t - z_p)}{l_p} + \varkappa \operatorname{ctg} \frac{\pi(t - \bar{z}_p)}{l_p} - \frac{\pi}{l_p} \frac{\bar{z}_p - z_p}{\sin^2 [\pi(\bar{t} - z_p)/l_p]} \right] + \\
& + \frac{X - iY}{2l_p(1 + \varkappa)} \left[\operatorname{ctg} \frac{\pi(\bar{t} - \bar{z}_p)}{l_p} + \varkappa \operatorname{ctg} \frac{\pi(\bar{t} - z_p)}{l_p} + \frac{\pi}{l_p} \frac{\bar{z}_p - z_p}{\sin^2 [\pi(t - \bar{z}_p)/l_p]} \right] + \\
& + \frac{X + iY}{2l_p(1 + \varkappa)} \left[\operatorname{ctg} \frac{\pi(t - z_p)}{l_p} + \varkappa \operatorname{ctg} \frac{\pi(t - \bar{z}_p)}{l_p} - \frac{\pi}{l_p} \frac{\bar{z}_p - z_p + t - \bar{t}}{\sin^2 [\pi(t - z_p)/l_p]} - \right. \\
& \left. - \frac{\pi}{l_p} \frac{\varkappa(t - \bar{t})}{\sin^2 [\pi(t - \bar{z}_p)/l_p]} \right] e^{2i\theta} + \frac{X - iY}{2l_p(1 + \varkappa)} \left[\varkappa \operatorname{ctg} \frac{\pi(t - z_p)}{l_p} + \operatorname{ctg} \frac{\pi(t - \bar{z}_p)}{l_p} + \right. \\
& \left. + \frac{\pi}{l_p} \frac{\bar{z}_p - z_p}{\sin^2 [\pi(t - \bar{z}_p)/l_p]} - \frac{\pi^2 2(\bar{z}_p - z_p)(t - \bar{t})}{l_p^2} \frac{\operatorname{ctg}[\pi(t - \bar{z}_p)/l_p]}{\sin^2 [\pi(t - \bar{z}_p)/l_p]} \right] e^{2i\theta} + \\
& + \frac{M\pi i}{2l_m^2} \left[\frac{1}{\sin^2 [\pi(t - \bar{z}_m)/l_m]} - \frac{1}{\sin^2 [\pi(\bar{t} - z_m)/l_m]} \right] - \frac{M\pi i}{2l_m^2} \left[\frac{1}{\sin^2 [\pi(t - z_m)/l_m]} - \right. \\
& \left. - \frac{1}{\sin^2 [\pi(t - \bar{z}_m)/l_m]} + \frac{2\pi(t - \bar{t})}{l_m} \frac{\operatorname{ctg}[\pi(t - \bar{z}_m)/l_m]}{\sin^2 [\pi(t - \bar{z}_m)/l_m]} \right] e^{2i\theta}. \quad (10)
\end{aligned}$$

Следует сказать, что аналогичные формулы нетрудно вывести для сил и моментов, распределенных по некоторым кривым, лежащим внутри тела, или для других точечных воздействий (краевых дислокаций, силовых диполей, центров расширения–сжатия). Комплексные потенциалы Г. В. Колосова для них представлены, например, в работах [2, 14, 16, 17].

Различные методы решения ГИУ описаны в [6, 7].

5. Приведение задачи к системе алгебраических уравнений. Минувя приближенное решение полученных выше ГИУ, задача может быть непосредственно сведена к системе алгебраических уравнений с помощью введения дискретной неизвестной нагрузки [8, 15]. С этой целью в качестве второй вспомогательной задачи возьмем задачу о сплошной полуплоскости, загруженной в точках ζ_j , лежащих справа от контура Γ (при обходе контура по часовой стрелке), фиктивными сосредоточенными силами $\mathbf{p}_j = \mathbf{p}(\zeta_j) = p_j^x + ip_j^y$ ($j = 1, \dots, N$) — рис. 3.

Расположение точек ζ_j в зоне отверстия на удалении от контура Γ обусловлено тем, что в окрестности мест приложения сосредоточенных сил компоненты напряжения и смещения перестают быть ограниченными. Решения задач о точечных воздействиях правомерно применять только к частям тела, не слишком близким к местам их приложения [1]. Размещение некоторых точек ζ_j на самом контуре Γ возможно только в том случае, если на контуре отверстия действуют заданные сосредоточенные силы или же контур имеет угловые точки. Чтобы познакомиться с методом решения задач теории упругости для многосвязных областей с угловыми точками, отсылаем читателя к исследованиям [6]. Отметим лишь, что при наличии угловых точек или участков контуров отверстий с достаточно малым радиусом кривизны целесообразно использовать

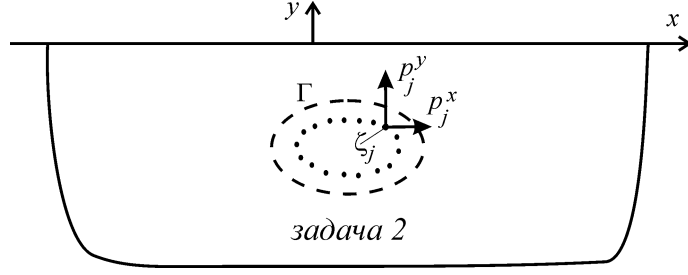


Рис. 3. Дискретизация неизвестной нагрузки

не только фиктивные сосредоточенные силы, но также и фиктивные точечные воздействия более высокого порядка, такие как двойные силы и центры расширения–сжатия [16, 17].

Итак, в таком случае вместо формул (4) будем иметь соотношения [13]

$$\begin{aligned}\Phi^{(2)}(z) &= -\sum_{j=1}^N \left\{ \frac{\mathbf{p}_j}{2\pi(1+\kappa)} \left(\frac{1}{z-\zeta_j} + \frac{\kappa}{z-\bar{\zeta}_j} \right) + \frac{\bar{\mathbf{p}}_j}{2\pi(1+\kappa)} \frac{\bar{\zeta}_j - \zeta_j}{(z-\bar{\zeta}_j)^2} \right\}, \\ \Psi^{(2)}(z) &= -\sum_{j=1}^N \left\{ \frac{\mathbf{p}_j}{2\pi(1+\kappa)} \left(\frac{\bar{\zeta}_j}{(z-\zeta_j)^2} + \frac{\kappa\bar{\zeta}_j}{(z-\bar{\zeta}_j)^2} \right) - \right. \\ &\quad \left. - \frac{\bar{\mathbf{p}}_j}{2\pi(1+\kappa)} \left(\frac{\kappa}{z-\zeta_j} + \frac{1}{z-\bar{\zeta}_j} - \frac{\bar{\zeta}_j - \zeta_j}{(z-\bar{\zeta}_j)^2} - \frac{2\bar{\zeta}_j(\bar{\zeta}_j - \zeta_j)}{(z-\bar{\zeta}_j)^3} \right) \right\}.\end{aligned}\quad (11)$$

Внося в граничное условие (5) выражения (6), (3), (11) и разделяя затем его на вещественную и мнимую части, после соответствующих преобразований получим систему двух вещественных уравнений

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^N p_j^x K_1(t, \zeta_j) + \sum_{j=1}^N p_j^y R_1(t, \zeta_j) &= f_1(t), \\ \sum_{j=1}^N p_j^x K_2(t, \zeta_j) + \sum_{j=1}^N p_j^y R_2(t, \zeta_j) &= f_2(t), \\ t &\in \Gamma.\end{aligned}\quad (12)$$

Здесь

$$\begin{aligned}K_1(t, \zeta_j) &= \operatorname{Re}(K(t, \zeta_j) + R(t, \zeta_j)), \quad K_2(t, \zeta_j) = \operatorname{Im}(K(t, \zeta_j) + R(t, \zeta_j)), \\ R_1(t, \zeta_j) &= \operatorname{Im}(-K(t, \zeta_j) + R(t, \zeta_j)), \quad R_2(t, \zeta_j) = \operatorname{Re}(K(t, \zeta_j) - R(t, \zeta_j)), \\ f_1(t) &= \operatorname{Re}f(t) = q_{nn}(t) - \sigma_{nn}^{(1)}(t), \quad f_2(t) = \operatorname{Im}f(t) = -q_{nt}(t) + \sigma_{nt}^{(1)}(t),\end{aligned}$$

где ядра $K(t, \zeta)$, $R(t, \zeta)$ определяются формулами (8), а правая часть $f(t)$ – соотношениями (9) или (10).

Заставим уравнения (12) удовлетворяться в N точках $t_k \in \Gamma$ ($k = 1, \dots, N$). Тогда краевые условия сведутся к системе $2N$ линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных p_j^x и p_j^y :

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^N p_j^x K_1(t_k, \zeta_j) + \sum_{j=1}^N p_j^y R_1(t_k, \zeta_j) &= f_1(t_k), \\ \sum_{j=1}^N p_j^x K_2(t_k, \zeta_j) + \sum_{j=1}^N p_j^y R_2(t_k, \zeta_j) &= f_2(t_k), \end{aligned} \quad (13)$$

$$t_k \in \Gamma, \quad k = 1, \dots, N.$$

6. Вычисление напряжений и результаты расчетов. Решив систему уравнений (13) относительно неизвестных p_j^x и p_j^y , по формулам (11) несложно определить функции $\Phi^{(2)}$ и $\Psi^{(2)}$. Окончательно комплексные потенциалы Г. В. Колосова для исходной задачи выражаются суммой

$$\Phi(z) = \Phi^{(1)}(z) + \Phi^{(2)}(z), \quad \Psi(z) = \Psi^{(1)}(z) + \Psi^{(2)}(z).$$

Зная функции Φ и Ψ , по формулам Г. В. Колосова (2), (6) нетрудно вычислить компоненты напряжений в любой точке тела. Или, иначе, можно сначала с помощью формул Г. В. Колосова найти компоненты напряжений в задачах 1 и 2, а затем уже, просуммировав их, согласно условию (1), получить распределение напряжений для исходной задачи.

Отметим, что метод решения системы уравнений (12) (метод коллокаций) не является сходящимся. При значительном увеличении числа фиктивных сил, а следовательно, и размерности системы уравнений (13) ее матрица становится плохо обусловленной. Тип фиктивных особенностей (силы, диполи, ...) и места их расположения следует выбирать из условий минимальной разности между заданными на контуре отверстия усилиями q_{nn}, q_{nt} и вычисляемыми в ходе решения задачи напряжениями σ_{nn}, σ_{nt} на контуре Γ в точках, отличных от узлов коллокации t_k , где решение удовлетворяется автоматически. Указанная разность характеризует погрешность метода. Фиктивную нагрузку необходимо подбирать для каждой ситуации индивидуально: она зависит от кривизны контура и усилий на нем. Для тестирования данного метода было исследовано несколько известных задач, при этом получено хорошее соответствие результатов вычислений и имеющихся теоретических и экспериментальных данных [3, 5]. Расчеты показали, что при непрерывной нагрузке на контуре Γ оптимальнее выбирать расстояние от точек ζ_j приложения фиктивных сил до контура Γ не менее чем удвоенное расстояние между соседними точками ζ_j . В таком случае суперпозиция полей напряжений от действия всех фиктивных сил приводит к достаточно гладкому их распределению на контуре и далее внутри тела. При соблюдении этого условия изменение расстояния от точек ζ_j до контура Γ или размерности системы (13) даже в несколько раз (пока обусловленность матрицы системы не становится критической) в отдельных случаях практически не влияет на погрешность расчетов. В протестированных модельных задачах при оптимальном выборе расчетных параметров погрешность не превышала 3%.

На рис. 4 приведен пример результатов расчетов, проведенных по предложенной схеме. На нем для сравнения показано распределение безразмерных напряжений σ_{xx}/P ,

вызванных действием сосредоточенной силы $\mathbf{P} = iY$ в полуплоскости с круговым вырезом (а) и без него (б). Здесь P – модуль силы \mathbf{P} . Графики построены для следующих исходных данных: точка приложения силы \mathbf{P} $z_p = -2i$; отверстие – круг радиусом 0.3 с центром в точке $z_c = -0.9i$. Распределение напряжений представлено в области $\{x \in [-2, 2], y \in [-1.9, 0]\}$ с исключенным кругом $|z + 0.9i| < 0.3$.

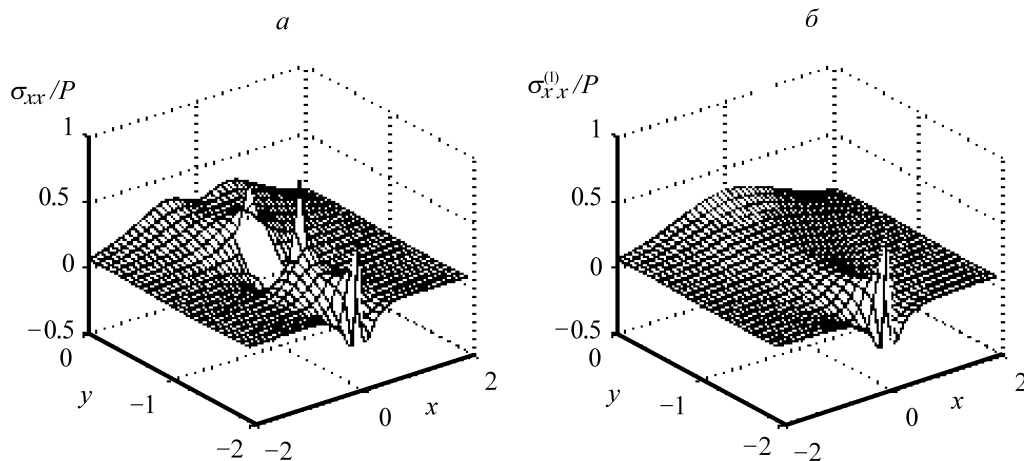


Рис. 4. Распределение напряжений в полуплоскости с отверстием (а) и без него (б)

Из рис. 4 видно, что наличие отверстия повышает уровень напряжений. Дальнейшие расчеты показали, что чем ближе вырез к месту приложения силы \mathbf{P} , тем выше значения напряжений на его границе и вблизи нее. Однако стоит сказать, что любая граница, будь то внешняя поверхность тела или контур отверстия, приводит к росту одних компонент напряжений и уменьшению других. Определенное влияние на рост напряжений оказывает кривизна границы. При увеличении радиуса кривизны максимальные напряжения на контуре отверстия стремятся к аналогичным величинам на прямолинейной кромке полуплоскости при равных расстояниях a от точки приложения силы \mathbf{P} до исследуемой границы. Для относительно больших отверстий такое влияние незначительно: при увеличении радиуса кривизны от $r = a$ до $r = \infty$ напряжения возрастают лишь на 20%. Это, конечно, относится к случаям, когда силы направлены так, как в рассмотренном выше примере. В некоторых других ситуациях (как, например, при растяжении) уменьшение радиуса кривизны отдельных участков контура отверстия приводит к повышению уровня напряжений. Близость выреза к прямолинейной кромке полуплоскости также способствует росту напряжений. При уменьшении расстояния между отверстием и прямолинейной границей от $h = \infty$ до $h = r$ (где r – радиус кругового отверстия) напряжения возрастают примерно на 30%. Дальнейшее сближение указанных границ приводит к более существенному росту напряжений, особенно в перемычке между ними (где в пределе при $h \rightarrow 0$ они стремятся к бесконечности). Отметим, что предложенный метод дает хорошие результаты и для близко расположенных границ области. В заключение укажем еще на тот очевидный факт, что чем меньше максимальный линейный размер отверстия, тем меньшее искажение оно вносит в поле напряжений, вызванное сосредоточенными воздействиями.

Литература

1. *Мусхелишвили Н. И.* Некоторые основные задачи математической теории упругости. М.: Наука, 1966. 707 с.
2. *Греков М. А.* Сингулярная плоская задача теории упругости. СПб.: Изд-во С.-Петерб. ун-та, 2001. 192 с.
3. *Савин Г. Н.* Распределение напряжений около отверстий. Киев: Наукова думка, 1968. 887 с.
4. *Уфлянд Я. С.* Интегральные преобразования в задачах теории упругости. Изд. 2-е, доп. Л.: Наука, 1967. 402 с.
5. *Петерсон Р.* Коэффициенты концентрации напряжений: Графики и формулы для расчета конструктивных элементов на прочность / пер. с англ. И. А. Нечая и др. М.: Мир, 1977. 304 с.
6. *Саврук М. П., Осив П. Н., Прокопчук И. В.* Численный анализ в плоских задачах теории трещин. Киев: Наукова думка, 1989. 248 с.
7. *Линьков А. М.* Комплексный метод граничных интегральных уравнений теории упругости. СПб.: Наука, 1999. 382 с.
8. *Пронина Ю. Г., Чистякова Е. О.* Первая основная краевая задача для упругой полуплоскости с отверстием // Нелинейные проблемы механики и физики деформируемого твердого тела / под ред. К. Ф. Черныха. СПб.: Соло, 2004. Вып. 8. С. 232–240.
9. *Jeffery G. B.* Plane stress and plane strain in bipolar coordinates // Philos. Trans. Roy. Soc. London. Ser. A. 1921. Vol. 221. P. 265–293.
10. *Sekhri J. N.* Some problems relating to stresses in an infinite plate with holes. IV. The effect of a concentrated force // Proc. Nat. Inst. Sci. India. Ser. A. 1961. Vol. 27, N 4. P. 295–304.
11. *Араманович И. Г.* О распределении напряжений в упругой полуплоскости, ослабленной подкрепленным круговым отверстием // Докл. АН СССР. 1955. Т. 104, № 3. С. 372–375.
12. *Даль Ю. М.* Напряженно-деформированное состояние упругой полуплоскости с краевой выемкой // Вопросы механики и процессов управления / Труды ЛГУ им. А. А. Жданова. Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1977. Вып. 13: Академик В. В. Новожилов — ученый, педагог, гражданин. 1990. С. 77–78.
13. *Даль Ю. М., Пронина Ю. Г.* Сосредоточенные силы и моменты у границы упругой полуплоскости // Изв. РАН. Сер. МТТ. 1998. № 5. С. 78–87.
14. *Веселков С. Ю., Даль Ю. М., Пронина Ю. Г.* Сосредоточенные силы и моменты в некоторых двумерных задачах теории упругости. СПб.: Науч.-исслед. ин-т химии С.-Петерб. ун-та, 1998. 90 с.
15. *Пронина Ю. Г.* Концентрация напряжений в упругой полуплоскости с краевыми выемками // Изв. РАН. Сер. МТТ. 1998. № 1. С. 103–109.
16. *Пронина Ю. Г.* Центры расширения–сжатия в упругой полуплоскости // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 1: Математика, механика, астрономия. 2007. Вып. 2. С. 140–149.
17. *Пронина Ю. Г.* Некоторые сингулярные решения теории упругости для полуплоскости // Актуальные проблемы прочности: Материалы XLVI Междунар. конференции. 15–17 окт. 2007 г. Витебск, Беларусь. Ч. 2. Витебск: УО «ВГТУ», 2007. С. 243–248.

Статья рекомендована к печати проф. Ю. М. Далем.

Статья принята к печати 25 декабря 2008 г.